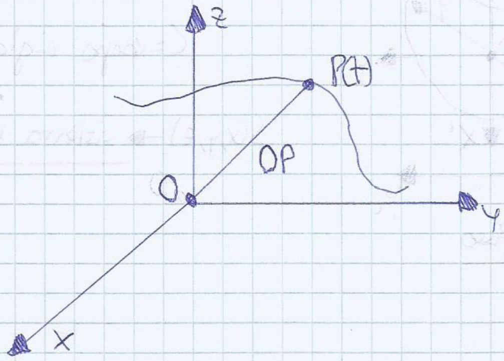
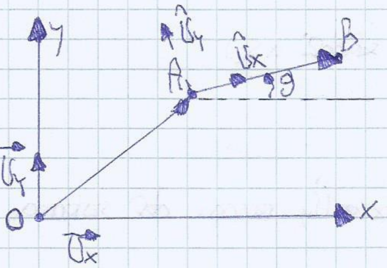


x(t), y(t), z(t) rappresentano i tre g.d.l (gradi di libertà) del punto P nello spazio.

Un vincolo di posizione è un dispositivo che limita la configurazione accessibile del sistema meccanico. In realtà un corpo rigido nello spazio possiede 6 g.d.l (le tre coordinate cartesiane, ed i tre angoli di rotazione). Ma partiamo dal caso più semplice ossia un piano bidimensionale ed un corpo rigido che si muove in esso.



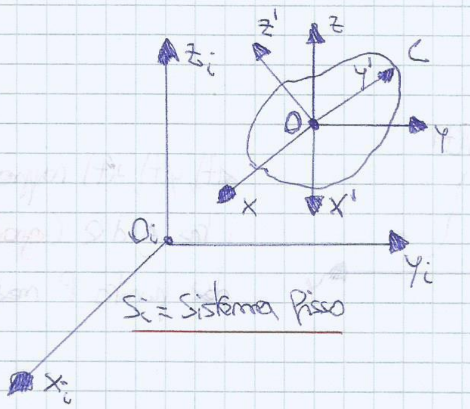
La formula fondamentale della cinematica rigida afferma che:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \cdot AB$$

$\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare. Nel disegno l'asse z è rivolto verso l'alto (uscente dal foglio). Il teorema di Poisson del corpo rigido piano afferma che:

$$\frac{d\hat{U}_x}{dt} = \omega \cdot \hat{U}_x \quad , \quad \frac{d\hat{U}_y}{dt} = \omega \cdot \hat{U}_y \qquad \text{dove } \omega = \dot{\theta}\vec{U}_z$$

È importante comprenderne il significato. Quando si studia il moto di un corpo rigido si studia, di fatto, il moto di un sistema solidale al corpo stesso rispetto ad un sistema fisso.



C = corpo rigido

S(x,y,z) → sistema solidale

Un osservatore è solidale ad un dato sistema, se quest'ultimo appare in quiete rispetto ad esso. Il moto è rigido se e soltanto se esiste un osservatore solidale al sistema. Per determinare il moto di un corpo rigido è necessario conoscere la configurazione iniziale e dell'atto di moto all'istante $t=t_0$. La velocità di un qualsiasi punto P del sistema solidale S può essere espressa come:

$$\vec{V}(O)_{(\text{rispetto a } S_i)} + \vec{V}_{(\text{con versori solidali a } S_i)}$$

La formula vista in precedenza ossia:

$$\frac{d\hat{U}_x}{dt} = \vec{\omega}\cdot\hat{U}_x \;, \quad \frac{d\hat{U}_y}{dt} = \vec{\omega}\cdot\hat{U}_y$$

con $\hat{U}_x$ e $\hat{U}_y$ versori del sistema solidale al corpo.

è una formula fondamentale ed il vettore $\vec{\omega}$ definisce un cambio di direzione della terna solidale rispetto al sistema di riferimento fisso. Riconsideriamo ora la formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}\cdot AB$$

Derivandola si ottiene:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\omega}{dt}AB + \vec{\omega}\cdot\frac{dAB}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\omega}{dt}AB + \vec{\omega}\cdot(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = a_A + \dot{\omega}AB +$$

$$+\vec{\omega}\cdot(\omega\cdot AB) \rightarrow \text{teorema di Rivals.}$$

L'atto di moto rigido piano può essere:

- traslatorio → $\vec{\omega} = 0$ e tutti i punti hanno la stessa velocità
- rotatorio → $\vec{\omega} \neq 0$ e non esistono punti con la stessa velocità

Nel caso in cui l'atto di moto sia rotatorio, esiste un centro di istantanea rotazione (CIR) definito così:

$$CIR = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_A}{\dot{\vartheta}^2}$$

Ma partiamo con ordine. Partiamo dalla formula fondamentale della cinematica del corpo rigido:

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} AB$ → ponendo $\vec{\omega} = 0$ (moto puramente traslatorio) otteniamo

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A$$

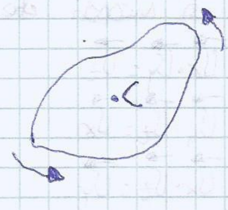
Nella rotazione di un corpo vi è un punto con velocità nulla, ed è il centro di istantanea rotazione.

$\vec{V}_{CIR} = 0$ → $0 = \vec{V}_A + \vec{\omega} \cdot AC$ dove: $C = CIR$

Moltiplicando ambo i membri per $\vec{\omega}$ si ha:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{V}_C = \vec{V}_A \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot AC)$$

$$\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_C}_{0} = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_A + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot AC)$$



Quindi:

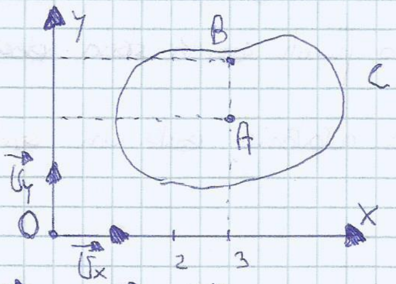
$$-\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot AC) = \vec{\omega} \cdot \vec{V}_A \rightarrow AC = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_A}{\omega^2}$$

Siccome $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \vec{\omega}$ → $AC = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}_A}{\dot{\vartheta}^2}$

(10)

Esercizio (1):

Si supponga di avere a disposizione la seguente situazione:



$$\begin{cases} A(3,2) \\ B(3,3) \end{cases}$$

Sia $\vec{V}_A = 2\vec{U}_x$ e $\vec{V}_B = 2\vec{V}_A$

Trovare il CIR.

* <u>SOLUZIONE:</u>

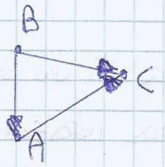
Siccome $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$ si ottiene: $\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{U}_z \neq 0 \Rightarrow$ moto rotatorio.

Quindi:

$$AC = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_A}{\dot{\vartheta}^2} = \frac{\omega \wedge 2\vec{U}_x}{\dot{\vartheta}^2} = \frac{\dot{\vartheta}\vec{U}_z \wedge 2\vec{U}_x}{\dot{\vartheta}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$AC = \frac{2\vec{U}_y}{\dot{\vartheta}}$$



Infatti si ricordi che:

$\vec{U}_x \wedge \vec{U}_y = \vec{U}_z$

$\vec{U}_y \wedge \vec{U}_z = \vec{U}_x$

$\vec{U}_x \wedge \vec{U}_z = \vec{U}_y$

Analogamente:

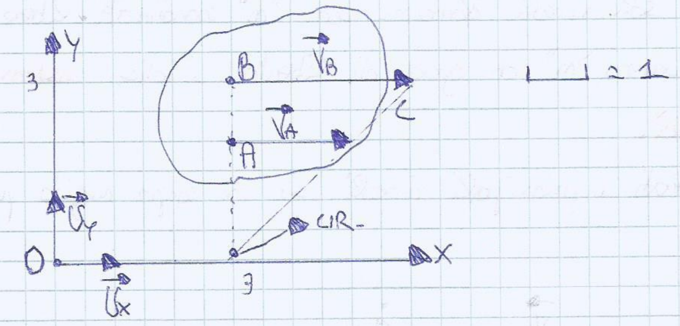
$$BC = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_B}{\dot{\vartheta}^2} = \frac{\dot{\vartheta}\vec{U}_z \wedge 4\vec{U}_x}{\dot{\vartheta}^2} = \frac{4\vec{U}_y}{\dot{\vartheta}} = 2AC$$

Concludendo:

$$BC = AB + AC \Rightarrow 2AC = AB + AC \Rightarrow AC = AB = -2\vec{U}_y$$

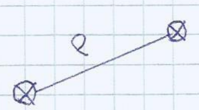
Infatti: $\vec{V}_B / \vec{V}_A = BC / AC \Rightarrow 2AC / AC = \vec{V}_B / \vec{V}_A = 2$

Graficamente:



ESERCIZIO (2):

Si consideri la seguente asta:



se gli estremi dell'asta subiscono il medesimo spostamento, che movimento ha l'asta?

* SOLUZIONE:

Banalmente lo spostamento dell'asta è puramente traslatorio.

Fino ad ora si sono trattati movimenti liberi del corpo rigido prevalentemente sul piano. Ora si analizzano i movimenti vincolati ed i vari vincoli.
Si definisce vincolo ogni condizione restrittiva che limita le posizioni e le velocità di un sistema meccanico. Una prima distinzione di vincolo si ha fra:

- vincolo interno, come per esempio il vincolo di rigidità
- vincolo esterno, come per esempio la presenza di altri corpi.

Un'altra distinzione è:

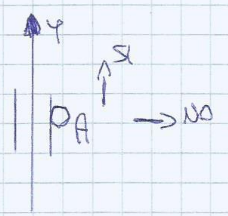
- vincolo olonomo, ossia un vincolo che limita la configurazione del sistema
- vincolo anolonomo, ossia i vincoli non olonomi.

⑫

Un sistema soggetto a soli vincoli olonomi con "n" coordinate libere indipendenti che sono uguali al numero "n" di gradi di libertà si dice sistema olonomo a "n" gradi di libertà.

Di seguito vengono mostrati i principali vincoli su un corpo rigido piano:

1) CARRELLO

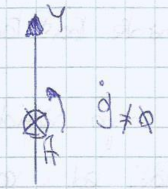


$\vec{V}_{A_x} = \emptyset$, $\dot{\vartheta} \neq \emptyset$

2) PATTINO

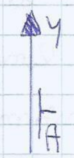
$\vec{V}_{A_x} = \emptyset$, $\dot{\vartheta} = \emptyset$

3) CERNIERA



$\dot{\vartheta} \neq \emptyset$

4) INCASTRO



$\dot{\vartheta} = \emptyset$, $\vec{V}_{A_x} = \emptyset$, $\vec{V}_{A_y} = \emptyset$

5) CERNIERA MOBILE → Collega due corpi rigidi. Nel punto A, ci può essere una rotazione tra i corpi, ma essi restano in contatto.

I vincoli appena illustrati sono vincoli di contatto.

Si consideri la seguente situazione:

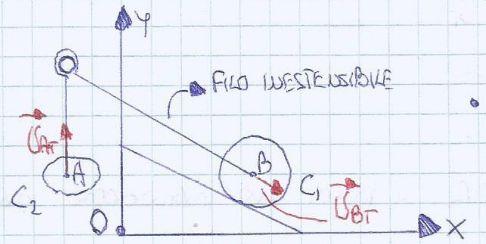
$\vec{U}_t$ = versore tangenziale
$\vec{U}_N$ = versore normale

Quando si ha la seguente situazione:

$V_{AN_{(1)}} < V_{AN_{(2)}} \Rightarrow$ distacco del corpo C_2.

$V_{AT_{(2)}} \neq V_{AT_{(1)}} \Rightarrow$ strisciamento tra corpi

Se, nel punto di appoggio, $V_{AN_{(1)}} = V_{AN_{(2)}}$ e $V_{AT_{(1)}} = V_{AT_{(2)}} \Rightarrow$ si ha puro rotolamento.
I vincoli appena citati sono detti vincoli di appoggio.
Lo strisciamento è un vincolo unilatero in quanto permette il distacco e quindi si ha soltanto una velocità in un unico senso. Il vincolo di rotolamento è un vincolo bilatero.
Si consideri ora la seguente situazione:



• C_1 e C_2 sono collegati tramite un filo inestensibile.

È bene ricordarsi che:

$$\vec{V}_A = \frac{dOA}{dt} = \frac{dOA}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dOA}{ds}\dot{s} \Rightarrow \text{siccome } dL_{AB} = 0 \Rightarrow \dot{s}_B = \dot{s}_A$$

Pertanto: $\vec{V}_B = \dot{s}_B \cdot \vec{U}_{TB}$ e $\vec{V}_A = \dot{s}_A \vec{U}_{TA} \Rightarrow \vec{V}_A \vec{U}_{TA} = \vec{V}_B \vec{U}_{TB}$