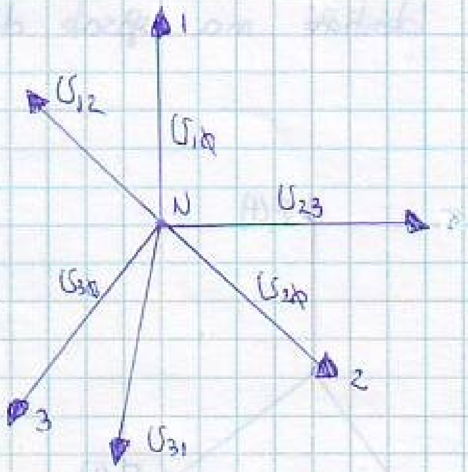
$U_{21} = -U_{12}$

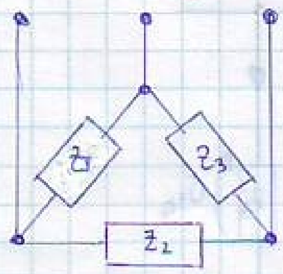
ed inoltre:

$U_{12} = U_{10} - U_{20}$

Graficamente si ha:



Un sistema trifase si dice simmetrico quando le tensioni hanno uguale modulo e sono sfasate di 120°. Chiamiamo corrente di fase la corrente che percorre la fase generatrice o la fase utilizzatrice. Chiamiamo corrente di linea la corrente che percorre la linea di alimentazione. Chiamiamo carico di fase equilibrato quel circuito di carico dove le tre impedenze hanno lo stesso modulo e lo stesso sfasamento. Invece il circuito di carico trifase squilibrato hanno magari lo stesso modulo, ma differenti sfasamenti. Vediamo ora come si possono collegare tali impedenze. Queste impedenze possono venire collegate a triangolo ottenendo:

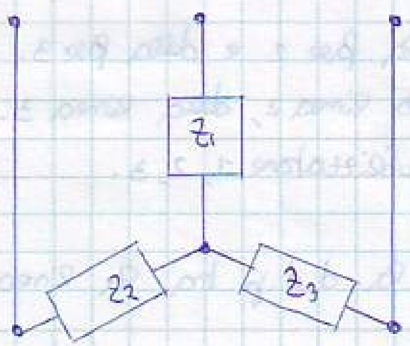


La corrente di linea è maggiore della corrente di fase e con carichi trifase equilibrati si ha:

$$I_L = \sqrt{3}\, I_F$$

Invece: $V_L = V_F$.

Le precedenti impedenze possono anche venire collegate a stella. Pertanto:

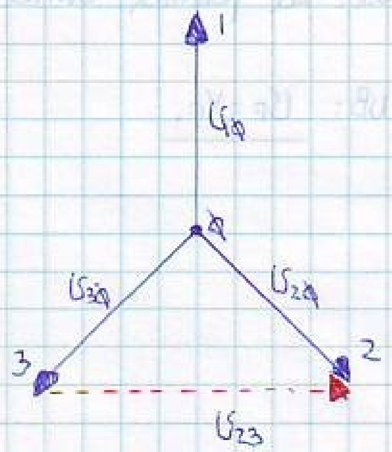


Qui la corrente di fase coincide con la corrente di linea, mentre la tensione è:

$$V_L = \sqrt{3}\, V_F$$

$$I_L = I_F$$

Si consideri ora:



Per quanto riguarda il triangolo isoscele $\phi 23$ si ha:

$$U_L = U_{23} = 2 \cdot U_F \cos 30° = 2\, U_F \frac{\sqrt{3}}{2} = U_F \cdot \sqrt{3}$$

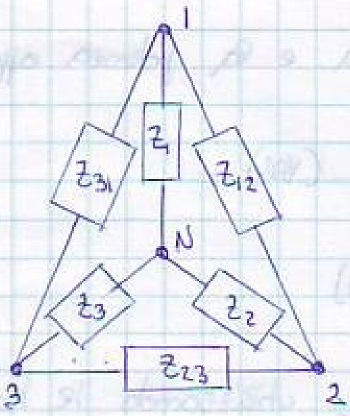
Quindi ricapitolando se il sistema è trifase equilibrato e con il neutro si può scrivere:

$$U_L = \sqrt{3}\, U_F$$

Viceversa se il sistema trifase è senza neutro, allora si può scrivere:

$$U_L = \sqrt{3}\, U_F$$

Quindi la precedente relazione è sempre valida purché il sistema sia equilibrato. Può anche succedere che il circuito sia di tipo stella - triangolo.



Le trasformazioni sono:

$$\vec{Z}_{12} = \frac{\vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2 + \vec{Z}_2 \cdot \vec{Z}_3 + \vec{Z}_3 \cdot \vec{Z}_1}{\vec{Z}_3}$$

$$\vec{Z}_{23} = \frac{\vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2 + \vec{Z}_2 \cdot \vec{Z}_3 + \vec{Z}_3 \cdot \vec{Z}_1}{\vec{Z}_1}$$

$$\vec{Z}_{31} = \frac{\vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2 + \vec{Z}_2 \cdot \vec{Z}_3 + \vec{Z}_3 \cdot \vec{Z}_1}{\vec{Z}_2}$$

Le trasformazioni opposte, ossia triangolo - stella sono:

$$\vec{Z}_1 = \frac{\vec{Z}_{12} \cdot \vec{Z}_{31}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{23} + \vec{Z}_{31}}$$

$$\vec{Z}_3 = \frac{\vec{Z}_{23} \cdot \vec{Z}_{31}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{23} + \vec{Z}_{31}}$$

$$\vec{Z}_2 = \frac{\vec{Z}_{12} \cdot \vec{Z}_{23}}{\vec{Z}_{12} + \vec{Z}_{23} + \vec{Z}_{31}}$$

Vediamo ora come calcolare la potenza nel caso del circuito di fase equilibrato. Supponiamo di avere una configurazione a stella. La potenza attiva in una fase è:

$$P_F = V_F \cdot I_F \cos\varphi$$

• NB: $U_F = V_F$.

Per il teorema di Boucherot si ha:

$$P = 3P_F = 3V_F \cdot I_F \cos\varphi$$

Inoltre:

$$I_L = I_F \quad e \quad V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

$$\Downarrow$$

$$P = 3V_F I_F \cos\varphi = 3\frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi \quad (W)$$

Per una configurazione a triangolo si ha:

$$V_L = V_F \quad e \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow P = 3V_F I_F \cos\varphi = \sqrt{3}\sqrt{3} V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\varphi \quad (W)$$

Analogamente si ha per la potenza reattiva e la potenza apparente:

$$Q = 3V_F I_F \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen}\varphi \quad (VAR)$$

$$S = 3V_F I_F = \sqrt{3} V_L I_L \quad (VA)$$

Per quanto riguarda la potenza apparente, utilizzando il teorema di Boucherot, si ha:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

• NB: Ho applicato anche il teorema di Pitagora.

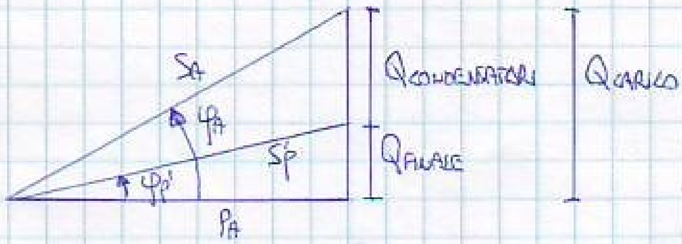
Il fattore di potenza è:

$$\cos\varphi = \frac{P_T}{S_T}$$

Per migliorare il fattore di potenza di un impianto, per renderlo per esempio pari a:

$\cos\varphi = 0,9$

che è il valore imposto dal distributore, o rendere lo stesso più elevato, occorre inserire in parallelo al carico una batteria di condensatori. Graficamente si ha:



Quindi formalmente si scrive:

$$Q_c = Q_{CARICO} - Q_{FINALE} = P_A \, Tg\,\varphi_A - P_A \, Tg\,\varphi'_{finale} = P_A (Tg\,\varphi_A - Tg\,\varphi'_{finale})$$

Siccome per la batteria di condensatori si ha:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow Q_c = 3\frac{V_{fase}^2}{X_c} = 3 V_{fase}^2 \omega C$$

Se il carico è di tipo stella:

NB: $V_A = U_A$

$$Q_c = P_A (Tg\,\varphi_A - Tg\,\varphi'_{finale}) = 3\left(\frac{V_A}{\sqrt{3}}\right)^2 \omega C$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{P_A (Tg\,\varphi_A - Tg\,\varphi'_{finale})}{\omega U_A^2}$$

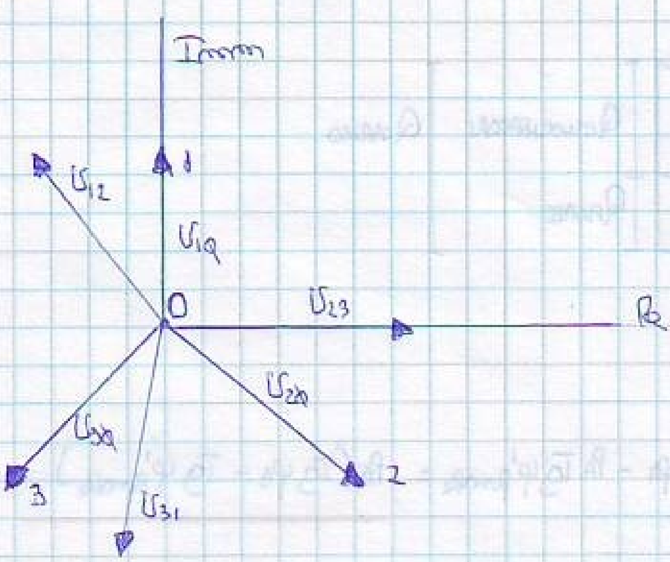
Se il carico invece è di tipo triangolo:

$$Q_c = P_A (Tg\,\varphi_A - Tg\,\varphi'_{finale}) = 3 \, V_A^2 \, \omega \cdot C$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{P_A (Tg\,\varphi_A - Tg\,\varphi'_{finale})}{3\,\omega V_A^2}$$

Si noti subito che il collegamento triangolo è tale che la capacità viene ridotta di $1/3$ del valore a stella e questo può essere un vantaggio economico. Ma per motivi e delle tensioni si opta per il collegamento a stella. L'operazione di aumentare il fattore di potenza va sotto il nome di rifasamento. Vediamo un esempio:



Si abbia per esempio una linea trifase con tensione di linea (concatenata) pari a 400 V. Si ha:

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = 231 V \quad \text{(se il carico è a stella).}$$

Quindi:

$\vec{V}_{10} = 231 V$ con fase: $90°$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_{10} = j231$

$\vec{V}_{20} = 231 V$ con fase: $330°$ $\quad \vec{V}_{20} = 231(\cos(-30°) + j\sin(-30°)) = 200 - j115{,}5$

$\vec{V}_{30} = 231 V$ con fase: $210°$ $\quad \vec{V}_{30} = 231(\cos(210°) + j\sin(210°)) = -200 - j115{,}5$

Si noti che l'argomento (fase) è positivo se si parte dall'asse reale positivo e lo si determina in senso antiorario. Analogamente le tensioni concatenate si trovano così:

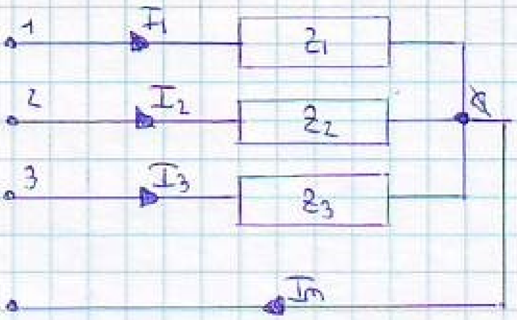
$\vec{V}_{12} = 400 \; (\varphi = 120°)$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_{12} = 400(\cos(120°) + j\sin(120°)) = -200 + j346{,}4$

$\vec{V}_{23} = 400 \; (\varphi = 0°)$ $\quad \vec{V}_{23} = 400(\cos(0°) + j\sin(0°)) = 400$

$\vec{V}_{31} = 400 \; (\varphi = 240°)$ $\quad \vec{V}_{31} = 400(\cos(-120°) + j\sin(-120°)) = -200 - j346{,}4$

Vediamo ora un esercizio completo.

1) Una linea trifase con neutro alimenta, alla tensione concatenata di 400 V e alla frequenza $f = 50\ Hz$, tre impedenze collegate a stella come in figura:



con: $\vec{Z}_1 = 50 \angle 53,13°\ (\Omega)$
$\vec{Z}_2 = 50 \angle 53,13°\ (\Omega)$
$\vec{Z}_3 = 50 \angle 53,13°\ (\Omega)$

• NB: CARICO EQUILIBRATO.

Determinare:

1) le correnti di linea e del neutro, vettorialmente e in modulo

2) calcolare vettorialmente le tensioni concatenate

3) Rappresentare il diagramma tensioni - correnti.

1) Innanzitutto: $j = \sqrt{-1}$; $|\vec{Z}_1| = |\vec{Z}_2| = |\vec{Z}_3| = 50$

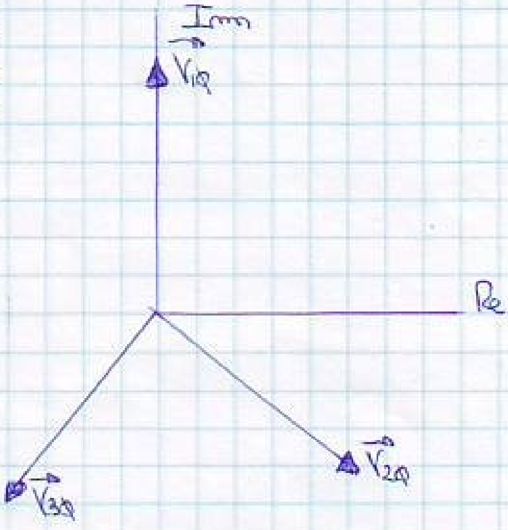
$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 53,13°$

Quindi in notazione complessa si ha:

$\vec{Z}_1 = 30 + j40$
$\vec{Z}_2 = 30 + j40$
$\vec{Z}_3 = 30 + j40$

Calcoliamo: $\vec{V}_{10} = 230,94j$; $\vec{V}_{20} = 200 - 115,47j$
$\vec{V}_{30} = -200 - 115,47j$

Infatti: $V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$



Siccome: $\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}}$

si ricava che:

$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_{10}}{\vec{Z}_1} \Rightarrow \vec{I}_1 = 3,695 + j\,2,771$

$\vec{I}_2 = 0,552 - j\,4,586$

$\vec{I}_3 = -4,243 + j\,1,814$

I moduli delle correnti sono rispettivamente:

$|\vec{I}_1| = 4,619$ $|\vec{I}_3| = 4,619$ e gli argomenti sono: $\varphi_1 = 36,87$
$|\vec{I}_2| = 4,619$ $\varphi_2 = -83,13$
$\varphi_3 = 156,87$

Verifichiamo con la legge di Kirchoff e otteniamo:

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = I_m$$

Troviamo ora le tensioni di linea:

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_{1a} - \vec{V}_{2a} = -200 + 346,41\,J$$

$$\vec{V}_{23} = \vec{V}_{1a} - \vec{V}_{3a} = 200 + 346,41\,J$$

$$\vec{V}_{31} = \vec{V}_{3a} - \vec{V}_{1a} = -200 - 346,41\,J$$

Graficamente si ha: