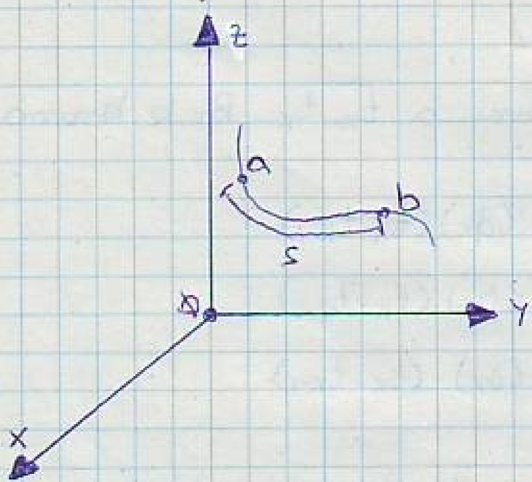
Si definisce dunque l'ascissa curvilinea s come la lunghezza del tratto della linea che va dall'estremo a all'estremo b.

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = \int_a^b |P'(t)|\, dt}$$

Graficamente si ha:



Si osservi che l'ascissa curvilinea è indipendente sia dall'orientamento della linea stessa sia dal tipo di rappresentazione parametrica. Infatti posto:

$$t = \varphi(\gamma) \Rightarrow dt = \varphi'(\gamma)\, d\gamma$$

$$\int_a^b |P'(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{dP}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta \left|\frac{dP}{d\gamma}\frac{1}{\varphi'(\gamma)}\right| \varphi'(\gamma)\, d\gamma = \int_\alpha^\beta \left|\frac{dP}{d\gamma}\right| d\gamma$$

dove abbiamo supposto $\varphi(\gamma)$ continua e derivabile in un intervallo base $\alpha \div \beta$. In questo caso il parametro in questione è γ. Detto ciò possiamo ora introdurre il concetto di integrale di linea.
Siano:

$$\begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \\ z = \omega(s) \end{cases}$$

le equazioni parametriche di una generica linea p regolare nello spazio. Come si può facilmente notare, il parametro in questione è l'ascissa curvilinea s.

Si supponga poi che tale linea regolare abbia come estremi a e b tali che:

$$\begin{cases} A: (\varphi(0), \psi(0), \omega(0)) \\ B: (\varphi(\ell), \psi(\ell), \omega(\ell)) \end{cases}$$

Dunque ℓ è la lunghezza dell'intera linea e $0 \vdash \ell$ è l'intervallo base. Sia poi $U(x,y,z) = U(P)$ una generica funzione definita per ogni punto $P \in \Gamma$ e ivi continua. Supponiamo che la linea Γ sia divisa in m punti:

$$a = P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_m = b$$

Questa suddivisione deriva dal fatto che l'intervallo base è stato così suddiviso:

$$0 = S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_m = \ell$$

Siano poi:

$\Delta S_K = S_K - S_{K-1}$ la lunghezza di un generico archetto.

e $\widehat{P_K P_{K-1}}$ l'archetto in questione. Si prenda $Q_1, \dots, Q_m$ punti appartenenti agli archi $\widehat{P_0P_1}, \dots, \widehat{P_{m-1}P_m}$.

$$S_\delta = U(Q_1)\Delta S_1 + U(Q_2)\Delta S_2 + \dots + U(Q_m)\Delta S_m$$

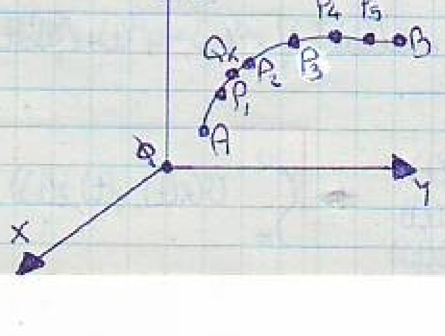
S_δ, in questo caso, è la somma della funzione $U(x,y,z)$ estesa alla linea Γ. $U(Q_1)$, ... $U(Q_m)$ sono i rispettivi valori funzionali dei punti $Q_1, \dots, Q_m$. Ovviamente un generico punto $Q_K \in \widehat{P_K P_{K-1}}$ possiede tre coordinate:

$$\boxed{U(x,y,z) = U(Q_K)}$$

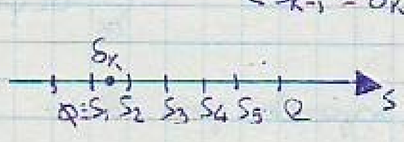
Dunque essendo x, y, z coordinate parametriche cioè coordinate dipendenti da un parametro, (in questo caso l'ascissa curvilinea) allora:

$$\boxed{U(Q_K) = U(\varphi(\delta_K), \psi(\delta_K), \omega(\delta_K))}$$

dove δ_K è l'ascissa curvilinea del punto Q_K. Graficamente si ha:



$(S_{K-1} \le \delta_K \le S_K)$



Posta dunque:

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} S_\delta = \int_0^\ell U(\varphi(s), \psi(s), \omega(s))\,ds}$$

Questo limite si chiama integrale della funzione $U(x,y,z) = U(P)$ esteso alla linea Γ. Questo si indica nel seguente modo:

$$\boxed{\int_\Gamma U(x,y,z)\,ds}$$

Questo integrale viene detto anche integrale di linea. Si ricordi però che non è necessario esprimere le equazioni parametriche di Γ in funzione dell'ascissa curvilinea. Infatti si può avere la seguente situazione:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A: (x(a), y(a), z(a)) \\ B: (x(b), y(b), z(b)) \end{cases}$$

Dunque l'ascissa curvilinea è:

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Dunque:

$$\begin{cases} x = \varphi(s(t)) \\ y = \psi(s(t)) \\ z = \omega(s(t)) \end{cases} \Rightarrow s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$ds = s'(t)\,dt$$

Alla fine si ottiene:

$$\int_0^\ell U(\varphi(s), \psi(s), \omega(s))\,ds = \int_0^\ell U(\varphi(s(t)), \psi(s(t)), \omega(s(t)))\,s'(t)\,dt$$

cioè:

$$\int_0^\ell U(\varphi(s(t)), \psi(s(t)), \omega(s(t)))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Sapendo però che:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(s(t)) \\ y(t) = \psi(s(t)) \\ z(t) = \omega(s(t)) \end{cases} \Rightarrow \int_0^\ell U(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

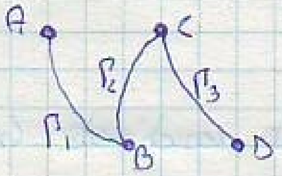
Vediamo ora due proprietà notevoli degli integrali di linea.

1) Indicando con $-\Gamma$ la linea ottenuta da Γ invertendo l'orientamento della stessa si ha:

$$\boxed{\int_{\Gamma} U(x,y,z)\,ds = \int_{-\Gamma} U(x,y,z)\,ds}$$

cioè l'integrale di linea non varia al variare dell'orientamento della linea stessa.

2) Si prenda in considerazione una linea generalmente regolare.



L'integrale di linea gode della proprietà di additività.

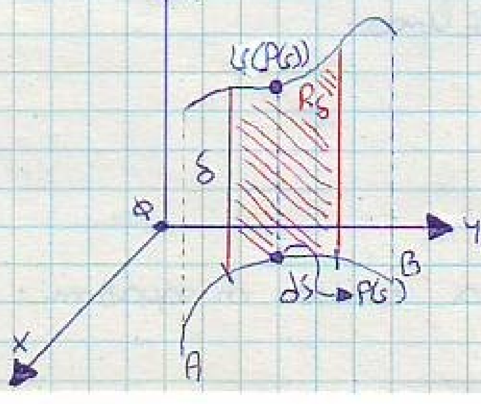
$$\boxed{\int_{\Gamma} U(x,y,z)\,ds = \int_{\Gamma_1} U(x,y,z)\,ds + \int_{\Gamma_2} U(x,y,z)\,ds + \int_{\Gamma_3} U(x,y,z)\,ds}$$

Esiste anche un'interpretazione geometrica dell'integrale di linea. Sia $U(x,y) > 0$, e consideriamo il trapezoide δ definito da:

$$\begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases} \qquad (0 \le s \le \ell)$$

e la guida sia tale che:

$$0 \le z \le U(\varphi(s), \psi(s)) = U(P(s))$$



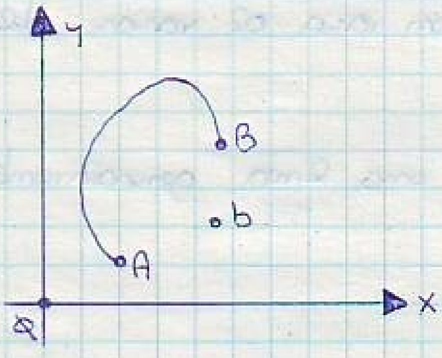
$$\boxed{A(R_s) = U(P(s))\,ds}$$

R_s = rettangolo infinitesimo.

Ovviamente l'area dell'intero trapezoide è:

$$\boxed{A(S) = \int_\Gamma U(\varphi(s), \psi(s))\, ds}$$

Infine si ricordi che se si vuole calcolare il baricentro di Γ bisogna ricordarsi che:



b = baricentro

Il baricentro, nel piano xy, ha determinate coordinate (x_0, y_0, z_0) che si ottengono nella seguente maniera:

$$\boxed{x_0 = 1/\ell \int_\Gamma x\, ds}$$

$$\boxed{y_0 = 1/\ell \int_\Gamma y\, ds}$$

$$\boxed{z_0 = 1/\ell \int_\Gamma z\, ds}$$

Ora vediamo alcuni esercizi sugli integrali di linea. Nella risoluzione di alcuni di essi si usano delle nozioni presenti nella sezione "RIPASSO DEI CONCETTI MATEMATICI" presente in fondo al quaderno.

Esercizi:

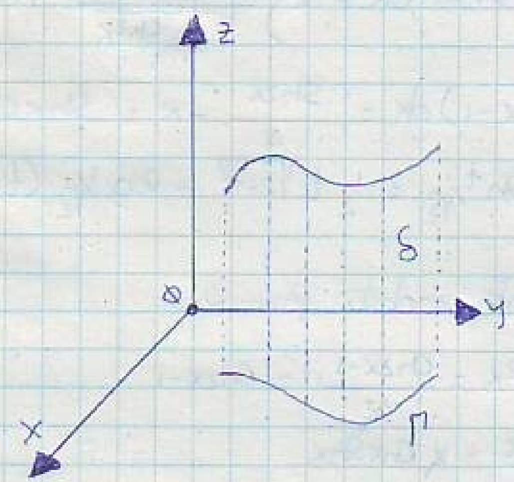
1) Calcolare il seguente integrale di linea:

$$\int_\Gamma \frac{x^2+y^2}{2+z^2}\, ds$$

dove Γ è l'arco OA di elica conica di equazioni:

$x = t\,\mathrm{sen}\,t \quad , y = t\cos t \quad , z = t$

con t: $0 \le t \le \frac{3}{2}\pi$.



Siccome $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{(t\,\mathrm{sen}\,t)'^2 + (t\cos t)'^2 + t'^2} = \sqrt{\Big[(\mathrm{sen}\,t + t\cos t)^2 +}$
$+ (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t)^2 + 1^2\Big]} = \sqrt{\big[\mathrm{sen}^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\,\mathrm{sen}\,t\cos t + \cos^2 t + t^2\mathrm{sen}^2 t - 2t\cos t\,\mathrm{sen}\,t + 1}$ =
$= \sqrt{(\underbrace{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}) + t^2(\underbrace{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t}_{1}) + 1} = \sqrt{(t^2+2)}$

Siccome:

$$ds = \sqrt{\dots}\,dt \Rightarrow I = \int_\Gamma \frac{t^2\mathrm{sen}^2 t + t^2\cos^2 t}{2+t^2}\sqrt{2+t^2}\,dt =$$

$$= \int_\Gamma \frac{t^2(\overbrace{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}^{1})}{2+t^2}\sqrt{2+t^2}\,dt$$

Siccome t è:

$$0 \le t \le \tfrac{3}{2}\pi \Rightarrow \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{t^2}{2+t^2}\sqrt{2+t^2}\,dt$$

Dunque:

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{t^2}{2+t^2}\sqrt{2+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{t^2}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$$

Sostituendo:

$$t = \sqrt{2}\,\mathrm{Sh}\,x \Rightarrow dt = \sqrt{2}\,\mathrm{Ch}\,x\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{Sh}^2 x}{\sqrt{2+2\,\mathrm{Sh}^2 x}}\sqrt{2}\,\mathrm{Ch}\,x\,dx = 2\int \frac{\mathrm{Sh}^2 x}{\sqrt{2}+\sqrt{2\,\mathrm{Sh}^2 x}}\sqrt{2}\,\mathrm{Ch}\,x\,dx$$

Visto che: $Ch^2x - Sh^2x = 1 \Rightarrow 1 + Sh^2x = Ch^2x \Rightarrow Chx = \sqrt{1+Sh^2x}$

$$\Downarrow$$

$$I = 2\int \frac{Sh^2x}{\sqrt{2}+\sqrt{2}Sh^2x}\sqrt{2}\sqrt{1+Sh^2x}\,dx = 2\int \frac{Sh^2x}{\sqrt{1+Sh^2x}}\sqrt{1+Sh^2x}\,dx =$$

$$= 2\int Sh^2x\,dx = \int (Ch2x-1)\,dx = \frac{Sh2x}{2} - x = Shx\,Chx - x =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{t^2}{2}} - \operatorname{arcSh}\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}t\sqrt{2+t^2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\sqrt{2+t^2}\right)$$

Per questi passaggi abbiamo utilizzato codeste formule:

- $Sh^2x = \frac{Ch2x-1}{2} \Rightarrow \cancel{2}Sh^2x = \frac{Ch2x-1}{\cancel{2}} = Ch2x-1$
- $Sh2x = 2ShxChx \Rightarrow \frac{Sh2x}{\cancel{2}} = \cancel{2}ChxShx$
- Siccome:

$$t = \sqrt{2}\,Shx \Rightarrow t/\sqrt{2} = Shx \quad , \quad t/\sqrt{2} = Shx \Rightarrow x = \operatorname{ArcSh} t/\sqrt{2}.$$

Inoltre:

$$t = \sqrt{2}\,Shx \Rightarrow \sqrt{2+t^2} = \sqrt{2}\,Chx$$

$$\Downarrow \quad Chx = \sqrt{\frac{2+t^2}{2}} = \sqrt{1+\frac{t^2}{2}}$$

Poi: $\operatorname{ArcSh}x = \operatorname{SettSh}x$. Più precisamente:

$$Shx = y \Rightarrow x = \operatorname{SettSh}y \Rightarrow x = \log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

per la definizione di SettSh.
Dunque:

$$t/\sqrt{2} = Shx \Rightarrow x = \operatorname{SettSh} t/\sqrt{2} \Rightarrow x = \log\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\right)$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\sqrt{2+t^2}\right)$$

Infine:

$$I = \left[\frac{1}{2}t\sqrt{2+t^2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\sqrt{2+t^2}\right)\right]_0^{3/2\pi} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{2+\frac{9}{4}\pi^2} - \log\frac{\frac{3}{2}\pi+\sqrt{2+\frac{9\pi^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{8}\pi\sqrt{8+9\pi^2} - \log\frac{3\pi+\sqrt{8+9\pi^2}}{2\sqrt{2}}.$$

2) Calcolare l'integrale:

$$I = \int_\Gamma y^7\left\{1+(3x)^{4/3}\right\}^2 ds$$